第28卷 第2期 工 程 数 学 学 报 Vol. 28 No. 2
2011年04月 CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS Apr. 2011

文章编号:1005-3085(2011)02-0251-09

一类非线性多时滞脉冲抛物型方程解的振动性质*

冯 菊[1]， 李树勇[2]

(1- 西华师范大学美术学院，南充 637009； 2- 四川师范大学数学与软件科学学院，成都 610068)

摘 要: 本文研究一类非线性多时滞脉冲抛物型方程在齐次Dirichlet和Neumann边界条件下解的振动性质. 利用分析技巧，给出一个脉冲微分不等式无最终正解(或最终负解)的条件. 然后，利用平均法，将该方程解振动性问题转化为相应脉冲时滞微分不等式有无最终正解(或最终负解)问题，进而在两类齐次边界条件下获得了判别该类方程解振动的充分条件.

关键词: 非线性；时滞；脉冲；抛物型方程；振动性

分类号: **AMS**(2000) 35B05; 35R12 **中图分类号**: O175.26 **文献标识码**: A

1 引言

脉冲微分系统在航天技术、信息科学、理论物理、化学、最优控制、医药生物工程、人口动力学等理论中有着非常广泛的应用. 在过去的十几年里，脉冲微分系统理论得到了迅猛的发展[1-3]，特别是近年来，脉冲偏微分方程理论得到了广泛的关注，一些学者分别研究了不同形式的脉冲时滞偏微分方程解的振动性，建立起许多判断脉冲微分方程解振动的充分条件[3-11]，但这些研究较少涉及多滞量非线性脉冲方程解的振动性. 受他们工作的启发，在本文中，我们将研究一类非线性多时滞脉冲抛物型方程解的振动性质，建立起新的判别解振动的条件.

考虑如下非线性多时滞脉冲抛物型方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(t)h(u(t,x))\triangle u(t,x) + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(t)h_i(u(t-\tau_i(t),x))\triangle u(t-\tau_i(t),x) \\ \qquad\qquad -q(t,x)u(t,x) - \sum\limits_{j=1}^{l} g_j(t,x)f_j(u(t-\sigma_j(t),x)), \quad t \neq t_k, \\ u(t_k^+,x) - u(t_k,x) = \alpha_k u(t_k,x), \quad t = t_k, \quad k \in I_\infty, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

在边界条件

$$u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_0 \times \partial\Omega, \tag{2}$$

或

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_0 \times \partial\Omega \tag{3}$$

下解的振动性质，其中Δ为拉普拉斯算子，Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界区域，其边界$\partial\Omega$是光滑的，$\mathbf{n}$是$\partial\Omega$的单位外法向量，$\mathbf{R}_0$表示由$\mathbf{R}_+ = (0,\infty)$除去点集$\{t_k\}$的集合

$$G = \mathbf{R}_+ \times \Omega, \quad I_\infty = \{1,2,\cdots\}, \quad I_m = \{1,2,\cdots,m\}.$$

收稿日期: 2009-02-25. **作者简介**: 冯菊(1982年11月生)，女，讲师. 研究方向：偏泛函微分方程理论及应用.
***基金项目**: 国家自然科学基金(10671133)；西华师范大学科研启动基金(08B028).

2 基本假设和主要结果

(H_1) $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$，且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = +\infty$, $k \in I_\infty$；

(H_2) $a(t)$, $a_i(t) \in PC(\mathbf{R}_+, (0,+\infty))$, $i \in I_m$，其中 PC 表示如下性质的函数类：仅以 $t = t_k\,(k \in I_\infty)$ 为其第一类间断点，且在 $t = t_k\,(k \in I_\infty)$ 处是左连续的；

(H_3) $h(u)$, $h_i(u)$, $f_j(u) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, $uh_i'(u) \ge 0$, $uh'(u) \ge 0$, f_j 在 $\mathbf{R}_+$ 上是下凸的，且

$$f_j(-u) = -f_j(u), \quad \frac{f_j(u)}{u} \ge K,$$

其中 K 是非负常数，$i \in I_m$, $j \in I_l$；

(H_4) $q(t,x)$, $g_j(t,x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \overline{\Omega}, (0,\infty))$，记

$$Q(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} q(t,x), \quad G_j(t) = \min_{x\in\overline{\Omega}} g_j(t,x), \quad j \in I_l;$$

(H_5) $\tau_i(t)$, $\sigma_j(t) \in C(\mathbf{R}_+, (0,+\infty))$, $\sigma_j'(t) < 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\tau_i(t)) = +\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\sigma_j(t)) = +\infty$, $i \in I_m$, $j \in I_l$；

(H_6) 对充分大的 $k \in I_\infty$，常数 $\alpha_k \in (-1, 0]$.

定义1 函数 $u(t,x)$ 称为问题 (1),(2) 或问题 (1),(3) 的解，如果下列条件被满足：

(i) $u(t,x)$ 关于 t 是一阶可微函数，$t \ne t_k$, $k \in I_\infty$；

(ii) $u(t,x)$ 是关于 t 在 $t = t_k\,(k \in I_\infty)$ 处为第一类间断点的一个光滑连续函数，并且在脉冲时刻满足

$$u(t_k^+, x) = u(t_k, x) + \alpha_k u(t_k, x), \quad k \in I_\infty;$$

(iii) $u(t,x)$ 关于 x 是二阶可微函数；

(iv) $u(t,x)$ 在区域 G_0 上满足问题 (1) 和边界条件 (2) 或问题 (1),(3).

定义2 设 $u(t,x)$ 是问题 (1) 满足某类边界条件的一个非零解，如果存在正数 $T > 0$，使得当 $(t,x) \in [T, +\infty) \times \Omega$ 时，$u(t,x)$ 不变号，那么，称 $u(t,x)$ 在区域 G 中是非振动的，否则就是振动的.

定义3 一个脉冲微分不等式

$$\begin{cases} v'(t) + Q(t)v(t) + \sum\limits_{j=1}^{l} G_j(t) f_j\big(v(t-\sigma_j(t))\big) \le 0, & t \ne t_k, \\ v(t_k^+) - v(t_k) = \alpha_k v(t_k), \quad t = t_k, & k \in I_\infty, \end{cases} \tag{4}$$

的解 $v(t)$ 称为是最终正的，如果存在一个数 $\mu \ge 0$，使得当 $t \ge \mu$ 时，总有 $v(t) > 0$.

引理1 假设

$$\liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma_*(t)}^{t} \sum_{j=1}^{l} G_j(s)\mathrm{d}s > \frac{1}{\mathrm{e}KC}, \tag{5}$$

其中

$$\sigma_*(t) = \min\big\{\sigma_1(t), \cdots, \sigma_l(t)\big\}, \quad C = \min_{1\le j\le l} \exp k_j, \quad k_j = \liminf_{t\to\infty} \int_{t-\sigma_j(t)}^{t} Q(s)\mathrm{d}s, \quad j \in I_l,$$

则脉冲微分不等式 (4) 无最终正解.

证明 假设 $v(t)$ 是脉冲微分不等式 (4) 一最终正解，则根据假设 $\lim\limits_{t\to+\infty}(t-\sigma_j(t)) = +\infty$ 知，存在 $T_1 > 0$，使得当 $t \ge T_1$ 时，有 $v(t) > 0$, $v(t-\sigma_j(t)) > 0$.

由于

$$v'(t)+Q(t)v(t)+\sum_{j=1}^{l}G_j(t)f_j\big(v(t-\sigma_j(t))\big)\le 0,\quad t\neq t_k,$$

所以

$$\exp\Big(\int_{T_1}^{t}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\Big(v'(t)+Q(t)v(t)+\sum_{j=1}^{l}G_j(t)f_j\big(v(t-\sigma_j(t))\big)\Big)\le 0,\quad t\ge T_1,\quad t\neq t_k.$$

即

$$\begin{aligned}&\Big(v(t)\exp\Big(\int_{T_1}^{t}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\Big)'\\&+\Big(\exp\Big(\int_{T_1}^{t}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\Big)\sum_{j=1}^{l}G_j(t)f_j\big(v(t-\sigma_j(t))\big)\le 0,\quad t\neq t_k,\quad t\ge T_1.\end{aligned}\tag{6}$$

令

$$z(t)=v(t)\exp\Big(\int_{T_1}^{t}Q(s)\mathrm{d}s\Big),$$

则 (6) 式为

$$\begin{aligned}&z'(t)+\Big(\exp\Big(\int_{T_1}^{t}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\Big)\\&\times\sum_{j=1}^{l}G_j(t)f_j\Big(\Big(\exp\Big(-\int_{T_1}^{t-\sigma_j(t)}Q(s)\mathrm{d}s\Big)\Big)z\big(t-\sigma_j(t)\big)\Big)\le 0,\quad t\neq t_k,\quad t\ge T_1.\end{aligned}\tag{7}$$

对于 $t\ge T_1$ 时，有 $z(t-\sigma_j(t))>0$，由 (H_4) 及 (7) 式知

$$z'(t)<0,\quad t\neq t_k,\quad t\ge T_1.\tag{8}$$

由条件 (H_6) 知，存在 $T_2\in(T_1,+\infty)$，使得当 $t_k\ge T_2$ 时，$\alpha_k\in(-1,0]$. 因此

$$v(t_k^+)\le(1+\alpha_k)v(t_k)\le v(t_k),\quad t_k\ge T_2.$$

所以

$$z(t_k^+)\le(1+\alpha_k)z(t_k)\le z(t_k),\quad t_k\ge T_2.\tag{9}$$

由 (8) 和 (9) 知存在 $T_3\in(T_2,+\infty)$ 使得

$$z(t)<z\big(t-\sigma_*(t)\big),\quad t\ge T_3.\tag{10}$$

令 $w(t)=z(t-\sigma_*(t))/z(t)$，则 $w(t)>1$，$t\ge T_3$. 对 (7) 式两端同时除以 $z(t)$，再对 t 在 $t-\sigma_*(t)$ 到 t 上积分，并结合 (9) 式可得

$$\begin{aligned}&\ln z(t)-\ln z\big(t-\sigma_*(t)\big)+\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\Big[\Big(\exp\Big(\int_{T_1}^{s}Q(u)\mathrm{d}u\Big)\Big)\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\\&\times f_j\Big(\Big(\exp\Big(-\int_{T_1}^{s-\sigma_j(s)}Q(u)\mathrm{d}u\Big)\Big)z\big(s-\sigma_j(s)\big)\Big)/z(s)\Big]\mathrm{d}s\le 0,\quad t\ge T_3,\end{aligned}$$

即

$$\ln w(t) \ge \int_{t-\sigma_*(t)}^{t} \Big[\Big(\exp\Big(\int_{T_1}^{s} Q(u)\mathrm{d}u\Big)\Big)\sum_{j=1}^{l} G_j(s) \times \Big(\Big(\exp\Big(-\int_{T_1}^{s-\sigma_j(s)} Q(u)\mathrm{d}u\Big)\Big)z\big(s-\sigma_j(s)\big)\Big)/z(s)\Big]\mathrm{d}s.$$

再根据假设条件知

$$\begin{aligned}\ln w(t) \ge\ & K\int_{t-\sigma_*(t)}^{t} \Big[\Big(\exp\Big(\int_{T_1}^{s} Q(u)\mathrm{d}u\Big)\Big)\sum_{j=1}^{l} G_j(s) \\ & \times \Big(\exp\Big(-\int_{T_1}^{s-\sigma_j(s)} Q(u)\mathrm{d}u\Big)\Big)z\big(s-\sigma_j(s)\big)\Big]/z(s)\mathrm{d}s \\ \ge\ & K\int_{t-\sigma_*(t)}^{t} \Big[\exp\Big(\int_{s-\sigma_1(s)}^{s} Q(u)\mathrm{d}u\Big)G_1(s)+\cdots \\ & +\exp\Big(\int_{s-\sigma_l(s)}^{s} Q(u)\mathrm{d}u\Big)G_l(s)\Big]z\big(s-\sigma_*(s)\big)/z(s)\mathrm{d}s \\ \ge\ & KC\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)w(s)\mathrm{d}s, \quad t\ge T_3. \end{aligned} \tag{11}$$

从假设条件 (5) 式知一定存在一常数 N 和 $T_4\in(T_3,+\infty)$，使得当 $t\ge T_4$ 时

$$\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)\mathrm{d}s \ge N > \frac{1}{\mathrm{e}KC}.$$

因此，对 $t\ge T_4$ 时，存在一 t^*，使得 $t^*-\sigma_*(t^*)<t<t^*$，并且有

$$\int_{t}^{t^*}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)\mathrm{d}s \ge \frac{N}{2}, \qquad \int_{t^*-\sigma_*(t^*)}^{t}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)\mathrm{d}s \ge \frac{N}{2}. \tag{12}$$

对 (7) 式分别从 t 到 t^*，从 $t^*-\sigma_*(t^*)$ 到 t 积分，类似 (11) 式的估计，并利用 $\sigma_j'(t)<1$ 和 (9) 式，可得

$$\begin{aligned} z(t)-z(t^*) \ge\ & KC\int_{t}^{t^*}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)z\big(s-\sigma_j(s)\big)\mathrm{d}s \\ \ge\ & KC\int_{t}^{t^*}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)z\big(t^*-\sigma_j(t^*)\big)\mathrm{d}s \\ \ge\ & KCz\big(t^*-\sigma_*(t^*)\big)\int_{t}^{t^*}\sum_{j=1}^{l} G_j(s)\mathrm{d}s \\ \ge\ & \frac{NKC}{2}z\big(t^*-\sigma_*(t^*)\big), \quad t\ge T_4, \end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
z\big(t^*-\sigma_*(t^*)\big)-z(t) \ &\geq \ KC\int_{t^*-\sigma_*(t^*)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)z\big(s-\sigma_j(s)\big)\mathrm{d}s \\
&\geq \ KC\int_{t^*-\sigma_*(t^*)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)z\big(t-\sigma_j(t)\big)\mathrm{d}s \\
&\geq \ KCz\big(t-\sigma_*(t)\big)\int_{t^*-\sigma_*(t^*)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\mathrm{d}s \\
&\geq \ \frac{NKC}{2}z\big(t-\sigma_*(t)\big), \quad t\geq T_4.
\end{aligned} \tag{14}
$$

从 (13) 式和 (14) 式知

$$
z(t)\geq\frac{NKC}{2}z\big(t^*-\sigma_*(t^*)\big)\geq\frac{(NKC)^2}{4}z\big(t-\sigma_*(t)\big), \quad t\geq T_4,
$$

即

$$
\frac{4}{(NKC)^2}\geq\frac{z(t-\sigma_*(t))}{z(t)}=w(t), \quad t\geq T_4.
$$

所以 $w(t)$ 是有界的，令 $\liminf\limits_{t\to+\infty}w(t)=\iota$，则 $\iota\geq1$，且 ι 是有限的．再对 (11) 式两边同时取极限，有

$$
\ln\iota\geq\iota KC\Big(\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\mathrm{d}s\Big). \tag{15}
$$

利用 $\max\limits_{x\geq1}(\ln x-ax)=-\ln a-1$，那么上式就变为

$$
\max_{\iota\geq1}\Big[\ln\iota-\iota KC\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\mathrm{d}s\Big]
$$

$$
=\ -\ln\Big(KC\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\mathrm{d}s\Big)-1\geq0,
$$

因此，(15) 式意味着

$$
\ln\Big(KC\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\mathrm{d}s\Big)\leq-1,
$$

即

$$
\liminf_{t\to+\infty}\int_{t-\sigma_*(t)}^{t}\sum_{j=1}^{l}G_j(s)\mathrm{d}s\leq\frac{1}{\mathrm{e}KC},
$$

这与 (5) 式矛盾，因此，(4) 式无最终正解．

引理 2 假设 (H_1)-(H_6) 成立，$u(t,x)$ 是问题 (1), (2) 或问题 (1), (3) 在 G 内的解，且存在一个充分大的 $T>0$，使得 $u(t,x)>0$，$t>T$，$x\in\Omega$．若设

$$
v(t)=\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega}u(t,x)\mathrm{d}x,
$$

其中 $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}x$，则 t 充分大时，$v(t)$ 满足脉冲微分不等式 (4).

证明 由假设知，存在一个正数 $t_0 \geq T$，使得

$$u(t,x) > 0, \quad u\big(t-\tau_i(t),x\big) > 0, \quad u\big(t-\sigma_j(t),x\big) > 0,$$
$$(t,x) \in [t_0,+\infty) \times \Omega, \quad i \in I_m, \quad j \in I_l.$$

结合条件 (H_3) 和 (H_4)，得

$$q(t,x)u(t,x) \geq Q(t)u(t,x), \quad t \neq t_k, \quad j \in I_l, \tag{16}$$

$$g_j(t,x)f_j\big(u(t-\sigma_j(t),x)\big) \geq G_j(t)f_j\big(u(t-\sigma_j(t),x)\big), \quad t \neq t_k, \quad j \in I_l. \tag{17}$$

由问题 (1) 的第一个方程及 (16) 式和 (17) 式，有

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - a(t)h\big(u(t,x)\big)\triangle u(t,x) - \sum_{i=1}^{m} a_i(t)h_i\big(u(t-\tau_i(t),x)\big)\triangle u(t-\tau_i(t),x)$$
$$+ Q(t)u(t,x) + \sum_{j=1}^{l} G_j(t)f_j\big(u(t-\sigma_j(t),x)\big) \leq 0, \quad t \neq t_k, \quad (t,x) \in [t_0,\infty) \times \Omega. \tag{18}$$

对 (17) 式关于 x 在区域 Ω 上积分，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x - a(t)\int_\Omega h\big(u(t,x)\big)\triangle u(t,x)\mathrm{d}x$$
$$-\sum_{i=1}^{m} a_i(t)\int_\Omega h_i\big(u(t-\tau_i(t),x)\big)\triangle u\big(t-\tau_i(t),x\big)\mathrm{d}x + Q(t)\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{j=1}^{l} G_j(t)\int_\Omega f_j\big(u(t-\sigma_j(t),x)\big)\mathrm{d}x \leq 0, \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k. \tag{19}$$

由 Green 公式，边界条件及假设有

$$\int_\Omega h\big(u(t,x)\big)\triangle u(t,x)\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} h\big(u(t,x)\big)\frac{\partial u(t,x)}{\partial n}\mathrm{d}s - \int_\Omega h'\big(u(t,x)\big)\big|\nabla u(t,x)\big|^2\mathrm{d}x$$
$$= -\int_\Omega h'\big(u(t,x)\big)\big|\nabla u(t,x)\big|^2\mathrm{d}x \leq 0,$$

$$\int_\Omega h_i\big(u(t-\tau_i(t),x)\big)\triangle u\big(t-\tau_i(t),x\big)\mathrm{d}x \leq 0, \quad t \geq t_0, \quad i \in I_m.$$

再由 (H_3) 及 Jensen's 不等式有

$$\int_\Omega f_j\big(u(t-\sigma_j(t),x)\big)\mathrm{d}x \geq |\Omega| f_j\Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\big(t-\sigma_j(t),x\big)\Big)\mathrm{d}x.$$

令

$$v(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x,$$

其中 $|\Omega| = \int_\Omega \mathrm{d}x$，则 $v(t) > 0$，且由以上各式可得

$$v'(t) + Q(t)v(t) + \sum_{j=1}^{l} G_j(t) f_j\big(v(t-\sigma_j(t))\big) \le 0, \quad t \ge t_0, \quad t \ne t_k. \tag{20}$$

当 $t = t_k$ 时，由问题 (1) 的第二个方程，可以得到

$$\begin{aligned} v(t_k^+) &= \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t_k^+, x)\mathrm{d}x = (1+\alpha_k)\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t_k, x)\mathrm{d}x \\ &= (1+\alpha_k)v(t_k), \quad t_k \ge t_0, \quad k \in I_\infty. \end{aligned} \tag{21}$$

因此，(20) 式和 (21) 式说明 $v(t) > 0$ 是脉冲微分不等式 (4) 的解.

3　定理的证明

定理 1　在引理 1 的条件下，问题 (1),(2) 或问题 (1),(3) 的每一个解 $u(t,x)$ 在 G 内振动.

证明　假设 $u(t,x)$ 是问题 (1),(2) 或问题 (1),(3) 的一个非振动解. 那么根据定义 2 知，一定存在 $T_1 \ge 0$，使得当 $t \ge T_1$ 时，有 $u(t,x) \ne 0$. 不妨设 $u(t,x) > 0$. 由前面的定义及假设条件知，一定存在 $t_0' \ge T_1$，使得当 $t \ge t_0'$ 时，有

$$\begin{aligned} &u(t,x) > 0, \quad u\big(t-\tau_i(t), x\big) > 0, \quad u\big(t-\sigma_j(t), x\big) > 0, \\ &(t,x) \in [t_0', \infty) \times \Omega, \quad i \in I_m, \quad j \in I_l. \end{aligned}$$

类似引理 2 的证明过程，令

$$v(t) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(t,x)\mathrm{d}x,$$

由引理 2 知 $v(t) > 0$ 是脉冲微分不等式 (4) 的一最终正解，与引理 1 矛盾.

其次，若

$$u(t,x) < 0, \quad \eta(t) = \int_\Omega -u(t,x)\mathrm{d}x,$$

则类似地，可得 $\eta(t) > 0$ 是脉冲微分不等式 (4) 的一最终正解，与引理 1 矛盾.

定理 2　假设 (H_1)-(H_4) 成立，并且存在序列 $\{n_k\} \subset I_\infty$ 使得 $\alpha_{n_k} < -1$, $k \in I_\infty$. 则问题 (1),(2) 或问题 (1),(3) 的每一个解 $u(t,x)$ 在 G 内是振动的.

证明　若 $\alpha_{n_k} < -1$, $k \in I_\infty$，则由 (1) 的第二式可以得到

$$u(t_{n_k}^+, x) = (1+\alpha_{n_k})u(t_{n_k}, x), \quad k \in I_\infty, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega,$$

所以 $u(t_{n_k}^+, x)$ 与 $u(t_{n_k}, x)$ 总是异号. 因此，问题 (1), (2) 或问题 (1), (3) 的每一个解 $u(t,x)$ 在 G 内是振动的. 定理 2 成立.

4　应用举例

考虑下面脉冲时滞抛物型微分方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a(t)u^2(t,x)\triangle u(t,x) + a_1(t)u^2(t-\frac{\pi}{4}, x)\triangle u(t-\frac{\pi}{4}, x) \\ \qquad\qquad - u(t,x) - f_1(u(t-\pi, x)), \quad t \ne \frac{k\pi}{3}, \\ u(t_k^+, x) - u(t_k, x) = -\frac{1}{2}u(t_k, x), \quad t = \frac{k\pi}{3}, \quad k \in I_\infty, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega, \end{cases}$$

其中

$$a(t)=\begin{cases} 4, & t=0, \\ 4+\frac{1}{1-\cos 12t}, & t\neq \frac{k\pi}{3}, \quad k\in I_\infty, \end{cases}$$

$$a_1(t)=\begin{cases} 2, & t=0, \\ 2+\frac{1}{1-\cos^2 9t}, & t\neq \frac{k\pi}{3}, \quad k\in I_\infty, \end{cases}$$

$$\Omega=(0,\pi),\quad i=1,\quad j=1,\quad h(u)=u^2,\quad h_1(u)=u^2\Big(t-\frac{\pi}{4},x\Big),$$

$$q(t,x)=1,\quad g_1(t,x)=1,\quad f_1\big(-u(t-\pi,x)\big)=-f_1\big(u(t-\pi,x)\big),$$

$$\frac{f_1(u(t-\pi,x))}{u(t-\pi,x)}\geq K,\quad K\geq 1,\quad \alpha_k=-\frac{1}{2}.$$

边界条件为

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial \mathbf{n}}=\frac{\partial u(t,\pi)}{\partial \mathbf{n}}=0,\quad t\geq 0,\quad t\neq\frac{k\pi}{3},\quad k\in I_\infty,$$

容易看出

$$uh'(u)=2u^2>0,\quad uh_1'(u)=2u^2>0,\quad \liminf_{t\to\infty}\int_{t-\pi}^{t}\mathrm{d}s=\pi,$$

由定理1知，其所有解在 $G=\mathbf{R}_+\times(0,\pi)$ 内振动.

参考文献:

[1] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P S. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific Publishing, 1989

[2] 傅希林，闫宝强，刘衍胜. 脉冲微分系统引论[M]. 北京：科学出版社，2005
Fu X L, Yan B Q, Liu Y S. Introduction to Impulsive Differential Systems[M]. Beijing: Science Press, 2005

[3] 罗李平，欧阳自根. 一类非线性脉冲中立型时滞抛物方程组的振动准则[J]. 工程数学学报，2007, 24(4): 639-644
Luo L P, Ouyang Z G. Oscillation criteria for systems of a class of nonlinear impulsive neutral delay parabolic equations[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics, 2007, 24(4): 639-644

[4] Cui B T, Liu Y, Deng F. Some oscillation problems for impulsive hyperbolic differential systems with several delays[J]. Applied Mathematics and Computation, 2003, 146: 667-679

[5] Cui B T, Han M, Yang H. Some sufficient conditions for oscillation of impulsive delay hyperbolic systems with Robin boundary conditions[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 180: 365-375

[6] 邓立虎，葛渭高. 脉冲时滞抛物型方程解的振动准则[J]. 数学学报，2001, 44(3): 501-506
Deng L H, Ge W G. Oscillation criteria of solutions for impulsive delay parabolic equation[J]. Acta Mathematica Sinica, 2001, 44(3): 501-506

[7] Fu X, Liu X, Sivaloganathan S. Oscillation criteria for impulsive parabolic systems[J]. Applicable Analysis, 2001, 79: 239-255

[8] Fu X, Liu X, Sivaloganathan S. Oscillation criteria for impulsive parabolic differential equations with delay[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 268: 647-664

[9] Fu X, Zhang L. Forced oscillation for impulsive hyperbolic boundary value problem with delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 158: 761-780

[10] Fu X, Shiau L. Oscillation criteria for impulsive parabolic boundary value problem with delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2004, 153: 587-599

[11] 燕居让. 脉冲时滞抛物型方程解的振动性[J]. 数学学报，2004, 47(3): 579-586
Yan J R. Oscillation properties of solutions for impulsive selay parabolic equations[J]. Acta Mathematica Sinica, 2004, 47(3): 579-586

Oscillation Properties of Solutions for a Class of Nonlinear Impulsive Parabolic Equations with Several Delays

FENG Ju[1], LI Shu-yong[2]

(1- College of Fine Arts, China West Normal University, Nanchong 637009;
2- College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068)

Abstract: Oscillation of solutions to a class of nonlinear impulsive parabolic differential equations with several delays is discussed under the homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions. Some sufficient conditions of the impulsive differential inequalities which don't have eventually positive solutions (or eventually negative solutions) are obtained by employing the analysis technique. Then, the oscillation problems are transformed into the impulsive differential inequalities which don't have eventually positive solutions (or eventually negative solutions) by using the average method. Some sufficient conditions for oscillation are obtained under the homogeneous Dirichlet and Neumann boundary conditions.

Keywords: nonlinear; delay; impulsive; parabolic equations; oscillation

Received: 25 Feb 2009. **Accepted:** 28 Oct 2009.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10671133); the Research Fund of China West Normal University (08B028).